Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 12 18. Juni 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. f heisst *endlich*, wenn eine offene affine Überdeckung $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ existiert, sodass $f^{-1}(U_i) = \mathrm{Spec}(B_i)$ affin und B_i ein endlich-erzeugter A_i-Modul ist. Analog kann man (im Gegensatz zum vorigen Blatt) f als affin definieren, wenn eine offene affine Überdeckung U_i von Y existiert, sodass $f^{-1}(U_i)$ affin ist. Zeige: Ist f affin (bzw. endlich) und $U \subset Y$ eine offene affine Teilmenge, so ist $f^{-1}(U)$ affin (bzw. endlich).
Hinweis: Für f affin zeige: Man kann X zurückgewinnen aus der (quasikohärenten) Garbe $f_*\mathcal{O}_X$, indem man es für $U \subset Y$ offen affin durch $X_U = \mathrm{Spec}(\Gamma(U, f_*\mathcal{O}_X))$ überdeckt. Für f endlich verwende Lemma 3.16 aus dem Skript.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Zeige: Der Morphismus $H^p(Y, f_*\mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}),\ p \geq 0$ aus Aufgabe 2, Blatt 11, ist in den folgenden Fällen ein Isomorphismus:

a) X ist separiert und f ist affin.

b) f ist eine abgeschlossene Immersion.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Zeige:

a) Ist f eine abgeschlossene Immersion, so ist f endlich.

b) Sind X, Y noethersch und ist f endlich sowie $\mathcal{F}$ kohärent auf X, so ist $f_*\mathcal{F}$ kohärent auf Y.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein projektiver Morphismus noetherscher Schemata und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Zeige:

a) Für alle $p \geq 1$ und n groß genug gilt $R^pf_*(\mathcal{F}(n)) = 0$

b) Ist $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz kohärenter Garben, so ist $0 \to \mathcal{F}(n) \to \mathcal{G}(n) \to \mathcal{H}(n) \to 0$ exakt.

c) Ist $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ eine exakte Sequenz von kohärenten Garben, so ist für n groß genug die Sequenz $f_*(\mathcal{F}(n)) \to f_*(\mathcal{G}(n)) \to f_*(\mathcal{H}(n))$ exakt.

Abgabe bis spätestens 25. Juni 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.