Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 11 10. Juni 2009

Generell: Schreibe $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n$ und $S_+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n$ für einen graduierten Ring S.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Seien S, T graduierterte Ringe.

a) Sei $\phi : S \to T$ ein Homomorphismus von graduierten Ringen, welcher die Graduierung respektiert. Sei $U = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } T |\ \phi(S_+) \not\subset \mathfrak{p}\}$. Zeige: U ist eine offene Teilmenge von Proj T und ϕ legt in natürlicher Weise einen affinen (d.h. Urbilder offener affiner Mengen sind affin) Morphismus $f : U \to \text{Proj } S$ fest.

b) Sei $\phi : S \to T$ ein surjektiver Homomorphismus von graduierten Ringen, der die Graduierung respektiert, $U \subset \text{Proj } T$ wie in a). Zeige: $U = \text{Proj } T$, und der Morphismus $f : \text{Proj } T \to \text{Proj } S$ ist eine abgeschlossene Immersion.

Aufgabe 2. *(3 Punkte)*

Sei $X = \text{Proj } S$ und $\mathcal{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Nach Vorlesung gilt $\mathcal{F} = \tilde{M}$ mit $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$ als graduiertem S-Modul. Zeige: M ist durch $\mathcal{F}$ nicht eindeutig bestimmt. Betrachte dafür die graduierten S-Moduln $M = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m$ sowie $N = \bigoplus_{n\geq n_0} M_n$ für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ und zeige $\tilde{M} \cong \tilde{N}$ über X. Folgere, dass im allgemeinen verschiedene homogene Ideale von S dasselbe abgeschlossene Unterschema definieren können.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*

Sei S ein graduierter Ring, sodass S von S_1 als S_0-Algebra erzeugt wird sowie M, N graduierte S-Moduln. Zeige:

a) $M \otimes_S N$ ist in natürlicher Weise ein graduierter S-Modul.

b) Man hat einen natürlichen funktoriellen Isomorphismus $(M \otimes_S N)_{(f)} = M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)}$.

c) Folgere die Isomorphie $(M \otimes_S N)^\sim \cong \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N}$.

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*

Sei X ein Schema, $\mathcal{S} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ eine graduierte quasikohärente Garbe von $\mathcal{O}_X$-Algebren, d.h. man hat ($\mathcal{O}_X$-bilinear) $\mathcal{S}_m \cdot \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{m+n}$, wobei $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$ gelten soll. Wir wollen das 'dicke Proj' $\textbf{Proj}\ \mathcal{S}$ über X konstruieren. Zeige dazu:

a) Ist S ein graduierter Ring über einem Ring R mit $S_0 = R$ und $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus sowie $T = S \otimes_R A$, so ist T ein graduierter Ring über A und es gilt Proj T = Proj $S \times_{\text{Spec}(R)} \text{Spec}(A)$ (vgl. Aufgabe 1).

b) Für $U = \text{Spec}(R) \subset X$ offen affin ist $\mathcal{S}(U)$ eine graduierte R-Algebra, d.h. man hat Morphismen $\pi_U : \text{Proj } \mathcal{S}(U) \to U$

c) Ist $\{U_i\}$ eine offene affine Überdeckung von X mit Morphismen $\pi_{U_i} : \text{Proj } \mathcal{S}(U_i) \to U_i$, so existiert ein Schema $\textbf{Proj}\ \mathcal{S}$ durch Verkleben der Proj $\mathcal{S}(U_i)$ und man kann einen Morphismus $\pi : \textbf{Proj}\ \mathcal{S} \to X$ durch Verkleben der π_{U_i} definieren.

d) Ist $\mathcal{S} := \mathcal{O}_X[X_0, \dots, X_n]$, so ist $\mathcal{S}$ eine graduierte quasikohärente Garbe von $\mathcal{O}_X$-Algebren und es gilt $\textbf{Proj}\ \mathcal{S} = \mathbb{P}^n_X$.

Abgabe bis spätestens 18. Juni 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.