Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 10 4. Juni 2009

Aufgabe 1. (Welke Garben) *(7 Punkte)*

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. $\mathcal{F}$ heisst *welk* (fr: *flasque*, en: *flabby*), wenn für jedes Paar von offenen Teilmengen $V \subset U$ die Restriktion $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ surjektiv ist. Sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Wir wollen $H^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ für alle $p \geq 0$ zeigen. Sei dazu I mit einer Totalordnung versehen mit i_0 minimales Element sowie $f \in Z^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \ker d^{p+1}$.

a) Für $i \in I$ sei $\mathcal{U}_i$ die Überdeckung $U_i \cap \mathcal{U}$ von U_i. Man hat $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = C^{p-1}(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}|_{U_i}) \times \prod_{i'\neq i} C^{p-1}(\mathcal{U}_{i'}, \mathcal{F}|_{U_{i'}})$, wobei $C^{-1}(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}|_{U_i}) := \mathcal{F}(U_i)$ (wie muss man das Differential d definieren, damit der Beweis im folgenden für $p = 0$ durchgeht?). Sei $J \subset I$ mit $i_0 \in J$. Sei (H_J) die folgende Hypothese:

$$(H_J) = \begin{cases} \exists g_i = (g_{i\alpha})_{\alpha\in I^p} \in C^{p-1}(\mathcal{U}_i, \mathcal{F}|_{U_i}),\ i \in J, \text{ sodass} \\ \forall i, j \in J, i < j, \forall \alpha \in I^p : f_{ij\alpha} = g_{j\alpha}|_{U_{ij\alpha}} - (dg_i)_{j\alpha}. \end{cases}$$

Zeige: (H_J) ist erfüllt für $J = \{i_0\}$.

b) Es gelte (H_J). Sei $k \in I$ mit $k > i$ für alle $i \in J$. Zeige: Sind $i, j \in J$, $i \neq j$, so gilt $f_{ik\alpha} + (dg_i)_{k\alpha} = f_{jk\alpha} + (dg_j)_{k\alpha}$ auf $U_{ijk\alpha}$. Es existiert ein $h_{k\alpha} \in \mathcal{F}(\bigcup_{i\in J} U_{ik\alpha})$ mit $h_{k\alpha}|_{U_{ik\alpha}} = f_{ik\alpha} + (dg_i)_{k\alpha}$ für alle $i \in J$. Folgere, dass $(H_{J\cup\{k\}})$ wahr ist.

c) Zeige, dass (H_I) wahr ist (Zorns Lemma: man betrachte alle Paare $(J, (g_i)_{i\in J})$, die (H_J) erfüllen, geordnet in kanonischer Weise). Folgere $H^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

Aufgabe 2. *(2 Punkte)*

Sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zeige: Man hat in natürlicher Weise einen Morphismus $H^p(Y, f_*\mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F})$ für alle $p \geq 0$. Insbesondere hat man einen Morphismus $H^p(Y, \mathcal{O}_Y) \to H^p(X, \mathcal{O}_X)$ bzw. $H^p(Y, \mathcal{O}_Y^\times) \to H^p(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

Aufgabe 3. *(7 Punkte)*

Sei X ein Schema und $\mathcal{O}_X^\times$ die Garbe von abelschen Gruppen $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)^\times$.

a) Sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X sowie $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X, sodass für $i \in I$ gilt $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X|_{U_i}$, d.h. erzeugt von einem Schnitt $e_i \in \mathcal{L}(U_i)$. Zeige: Es existieren $f_{ij} \in \mathcal{O}_X^\times(U_{ij})$, sodass (unter obiger Identifizierung) $e_i|_{U_{ij}} = e_j|_{U_{ij}} f_{ij}$ für alle i, j. Sei $f = (f_{ij})_{i,j} \in C'^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$. Zeige, dass $f \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$, dass das Bild von f in $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ unabhängig von der Wahl der e_i ist und dass das Bild $\phi(\mathcal{L})$ von f in $H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ unabhängig von der Wahl von $\mathcal{U}$ ist.

b) Zeige: $\phi(\mathcal{L}) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{L}$ frei ist.

c) Zeige, dass die Abbildung $\mathcal{L} \mapsto \phi(\mathcal{L})$ ein Isomorphismus $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ ist.

d) Ist $g : X \to Y$ ein Schemamorphismus, so wird einerseits durch $\mathcal{L} \mapsto g^*\mathcal{L}$ ein Morphismus $g_1 : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$ induziert; andererseits hat man den Morphismus $g_2 : H^p(Y, \mathcal{O}_Y^\times) \to H^p(X, \mathcal{O}_X^\times)$ (vgl. Aufgabe 2). Zeige die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(Y) \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[d, "\cong"] \\ H^1(Y, \mathcal{O}_Y^\times) \arrow[r, "g_2"] & H^1(X, \mathcal{O}_X^\times). \end{tikzcd}$$

Abgabe bis spätestens 11. Juni 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.