Universität Heidelberg Prof. Dr. Otmar Venjakob
Mathematisches Institut Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 9 28. Mai 2009

Aufgabe 1. *(12 Punkte)*

Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, A ein kommutativer Ring und $\mathcal{F}$ eine Garbe von A-Moduln auf X.Wir wollen zeigen, dass die Komplexe $(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d)$ und $(C'^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}), d)$ (alternierende Koketten) quasi-isomorph bzgl. der Inklusion $i : C'^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sind, d.h. $H^n(C'^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \cong H^n(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$ für alle n gilt.

Sei $K_p(I)$ $(p \geq 0)$ die freie abelsche Gruppe, die von *Simplizes* $s = (i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$ generiert wird. Für ein beliebiges s sei $|s| := \{i_0, \ldots, i_p\} \subset I$. Eine Gruppenhomomorphismus $h_{p,q} : K_p(I) \to K_q(I)$ heisst *simplizialer Morphismus*, wenn für alle Simplizes s in $K_p(I)$ gilt $h_{p,q}(s) = \sum_{s'} c(s)_{s'} \cdot s'$ mit $c(s)_{s'} \in \mathbb{Z}$ und s' Simplizes in $K_q(I)$ sind mit $|s'| \subset |s|$. Jedes solche $h_{p,q}$ induziert einen Morphismus

$$^t h_{p,q} : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), \quad f \mapsto {}^t h f \text{ mit } ({}^t h f)_s = \sum_{s'} c(s)_{s'} \cdot f_{s'}|_{U_s}.$$

a) Finde zum Einstieg den simplizialen Morphismus $\partial_p : K_{p+1}(I) \to K_p(I)$ mit $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$, der mit ${}^t\partial_p = d^p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ das in der Vorlesung definierte Differential induziert.

b) Zeige folgende Formeln (h_1, h_2 simpliziale Morphismen): ${}^t(h_1 + h_2) = {}^t h_1 + {}^t h_2$, ${}^t(h_1 \circ h_2) = {}^t h_2 \circ {}^t h_1$, ${}^t\mathrm{id} = \mathrm{id}$.

c) Seien $M = (M^\bullet, d), N = (N^\bullet, d')$ Kokettenkomplexe in A-Mod (d.h. $d_n \circ d_{n-1} = 0$ resp. für d') und $f, g : M \to N$ Morphismen von Kokettenkomplexen (d.h. $f^{n+1} \circ d^n = d'^n \circ f^n$ resp. für g), so heisst eine Familie von Morphismen $k^n : M^n \to N^{n-1}$ eine *Kokettenhomotopie* (für f, g, schreibe $f \sim g$), wenn gilt: $f^n - g^n = d'^{n-1} \circ k^n + k^{n+1} \circ d^n$ (dual für Kettenkomplexe, d.h. die Pfeile d, k gehen in die andere Richtung). Zeige: Ist $f \sim g$, so gilt $H^n(f) = H^n(g) : H^n(M) \to H^n(N)$.

d) Ein Morphismus von Kettenkomplexen $f : M \to N$ ist eine *Homotopieäquivalenz*, wenn ein Morphismus $f' : N \to M$ existiert mit $f \circ f' \sim \mathrm{id}$ bzw. $f' \circ f \sim \mathrm{id}$. Zeige: Ist $f : M \to N$ eine Homotopieäquivalenz, so gilt $H^n(f) : H^n(M) \xrightarrow{\sim} H^n(N)$.

e) Sei I mit einer Totalordnung versehen und $h_{q,q} = h_q : K_q(I) \to K_q(I)$ definiert als:

$$h_q((i_0, \ldots, i_q)) = \begin{cases} 0, & \text{falls zwei Indizes } i_j \text{ gleich sind,} \\ \mathrm{sgn}(\sigma)(i_{\sigma 0}, \ldots i_{\sigma q}), & \text{sonst mit } \sigma \text{ die Permutation der } i_j, \\ & \text{sodass } i_{\sigma 0} < i_{\sigma 1} < \ldots < i_{\sigma q}. \end{cases}$$

Zeige: Die h_q sind simpliziale Morphismen, h definiert einen Morphismus $K_\bullet(I) \to K_\bullet(I)$ von Kettenkomplexen, es gilt $h_0 = \mathrm{id}$ und ${}^t h_q$ ist eine Projektion von $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ auf $C'^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

f) Zeige: Es existiert ein simplizialer Morphismus $k_q : K_q(I) \to K_{q+1}(I)$, mit $\mathrm{id} - h = \partial \circ k + k \circ \partial$ (führe den Nachweis nur für $q = 0, 1$; Rest vgl. Übung; die Indizes werden der einfacheren Schreibweise wegen ab hier weggelassen).

g) Folgere schliesslich: Man hat in $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$:

$$\mathrm{id} - {}^t h = {}^t k \circ d + d \circ {}^t k,$$

d.h. man erhält insgesamt die Isomorphie $H^n(C'^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \cong H^n(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$.

Bitte wenden!

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ eine Verfeinerung einer Überdeckung von $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ mit zugehörigem $\sigma : J \to I$ und induziertem $\sigma^* : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Zeige im Fall $p = 1$: σ^* hängt nicht von der Wahl von σ ab.

Abgabe bis spätestens 4. Juni 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.