Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 7 14. April 2009

Aufgabe 1. (Serres Dévissage) *(4 Punkte)*
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Zeige:

a) Jede $\mathcal{O}_X$-Untergarbe von endlichem Typ einer kohärenten Garbe auf X ist kohärent.

b) Ist $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln und sind zwei der dort auftretenden Garben kohärent, so auch die dritte. (führe den Nachweis für einen der drei Fälle ($\mathcal{G}, \mathcal{H}$ kohärent $\Rightarrow \mathcal{F}$ kohärent geht am einfachsten); die Aussage darf ab c) für alle Fälle als bewiesen angenommen werden).

c) Direkte Summen einer endlichen Familie von kohärenten Garben sind kohärent.

d) Ist $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus kohärenter Garben, so sind $\ker(\varphi)$, $\operatorname{coker}(\varphi)$ und $\operatorname{im}(\varphi)$ ebenfalls kohärent.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein flacher Schemamorphismus. Zeige:

a) Für alle $x \in X, y = f(x)$ ist der von f induzierte Morphismus $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ surjektiv.

b) Für jede irreduzible Komponente T von X ist $\overline{f(T)}$ ebenfalls eine irreduzible Komponente.

c) Ist Y irreduzibel, $\eta \in Y$ der generische Punkt und $f^{-1}(\eta)$ irreduzibel, so ist X irreduzibel.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei M ein A-Modul, $X = \operatorname{Spec}(A) = \bigcup D(f_i)$ eine endliche offene Überdeckung, sodass M_{f_i} ein A_{f_i}-Modul von endlicher Präsentation ist. Zeige, dass dann M ein A-Modul von endlicher Präsentation ist (vgl. Lemma 3.16 im Skript).

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf einem lokal-noetherschen Schema X. Sei

$$\phi(x) = \dim_{\kappa(x)}(\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)), \quad x \in X.$$

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $\{x \in X | \ \phi(x) \leq n\}$ ist offen in X (Nakayama + e.g. Aufgabe 4a, Blatt 5). Insbesondere gilt, falls X irreduzibel und ξ der generische Punkt ist, dass $\phi(\xi) \leq \phi(x)$ für alle $x \in X$.

b) Sei A ein Ring und $\alpha : A^n \to M$ ein Morphismus von A-Moduln. Sei für beliebiges $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ der Homomorphismus

$$\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\kappa(\mathfrak{p})} : \kappa(\mathfrak{p})^n \to M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p}), \quad (\kappa(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})$$

injektiv. Zeige, dass dann $\ker(\alpha) \subseteq \operatorname{Nil}(A)^n$ gilt.

c) Sei $\phi(x) = n$ konstant für alle $x \in X$ und X reduziert. Zeige, dass dann $\mathcal{F}$ lokal-frei von Rang n ist.

Abgabe bis spätestens 20. April 2009, 19:00 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.