Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 6 7. Mai 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei X ein Schema und $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Zeige:

a) $U \mapsto f|_U \mathcal{O}_X(U)$ für alle affinen offenen U definiert eine $\mathcal{O}_X$-Idealgarbe, bezeichnet mit $f\mathcal{O}_X$.

b) $f\mathcal{O}_X$ ist endlich-erzeugt und quasi-kohärent.

c) $f\mathcal{O}_X$ ist im allgemeinen keine invertierbare Garbe (Kriterium für Invertierbarkeit?).

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei X ein Schema und $\mathcal{A}$ eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Algebra. Zeige: Ein $\mathcal{A}$-Modul $\mathcal{F}$ ist quasi-kohärent (auf dem geringten Raum $(X, \mathcal{A})$) genau dann, wenn $\mathcal{F}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul quasi-kohärent ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien X, Y S-Schemata, $\mathcal{F}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, $\mathcal{G}$ ein quasi-kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Modul sowie p, q die Projektionen von $X \times_S Y$ auf X bzw. Y. Bezeichne $\mathcal{F} \otimes_S \mathcal{G}$ das Tensorprodukt $p^*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{X \times_S Y}} q^*(\mathcal{G})$ auf $X \times_S Y$. Zeige:

a) Sind S, X, Y affin (mit Ringen A, B, C) und $\mathcal{F} = \tilde{M}$, $\mathcal{G} = \tilde{N}$ (M B-Modul, N C-Modul), so ist $\mathcal{F} \otimes_S \mathcal{G}$ kanonisch isomorph zur Garbe assoziiert zum $(B \otimes_A C)$-Modul $M \otimes_A N$.

b) Sind $f : T \to X$, $g : T \to Y$ weitere S-Morphismen, so gilt $(f, g)_S^*(\mathcal{F} \otimes_S \mathcal{G}) = f^*(\mathcal{F}) \otimes_T g^*(\mathcal{G})$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei das Schema $X = \coprod_p \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p)$ gegeben (p durchläuft alle Primzahlen), d.h. die disjunkte Vereinigung von Schemata $\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p)$, wobei die Strukturgarbe in natürlicher Weise gegeben ist. Sei $f : X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ der kanonische Morphismus, dessen Einschränkung $f|_{\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p)} : \operatorname{Spec}(\mathbb{F}_p) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ entspricht. Zeige: $f_*\mathcal{O}_X$ ist nicht quasi-kohärent.

Abgabe bis spätestens 14. Mai 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.