Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 5 30. April 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Ein Schemamorphismus $f : Y \to X$ heisst *Vektorbündel (von Rang n)*, wenn gilt:

a) Es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von X, sodass ein Isomorphismus $\varphi_i : f^{-1}(U_i) \cong \mathbb{A}^n_{U_i}$ für alle i existiert;

b) Ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so ist für ein beliebiges affines $V = \mathrm{Spec}(R) \subset U_i \cap U_j$ der Isomorphismus $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathbb{A}^n_V} : \mathbb{A}^n_V \to \mathbb{A}^n_V$ induziert von einem linearen Automorphismus $\theta_{ij} : R[X_1, \dots, X_n] \to R[X_1, \dots, X_n]$, $\theta_{ij}(X_k) = \sum a_{kl} X_l$, $a_{kl} \in R$.

Sei f ein Vektorbündel von Rang n und für $U \subset X$ offen

$$\mathcal{F}(U) = \{s : U \to Y \text{ Morphismus} |\ f \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

Zeige: $\mathcal{F}$ ist ein lokal-freier $\mathcal{O}_X$-Modul von Rang n.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeige: Eine Sequenz

$$\mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln ist exakt genau dann, wenn für alle offenen $U \subseteq X$ und alle $\mathcal{O}_U$-Moduln $\mathcal{G}$ die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}''|_U, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}'|_U, \mathcal{G})$$

exakt ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

a) Finde ein Beispiel eines (von $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}_i$ induzierten) $\mathcal{O}_{X,x}$-Homomorphismus $\left(\prod_{i \in I} \mathcal{F}_i\right)_x \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}_{i,x}$, der kein Isomorphismus ist.

b) Finde ein Beispiel einer Familie $(\mathcal{F}_i)$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln, sodass die Prägarbe $U \mapsto \bigoplus_i \mathcal{F}_i(U)$ keine Garbe ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $x \in X$ sowie $w : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ ein Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Sei weiterhin $\mathcal{F}$ von endlichem Typ, d.h. es existiert eine exakte Sequenz $\mathcal{O}^n \to \mathcal{F} \to 0$. Zeige:

a) Ist $w_x : \mathcal{G}_x \to \mathcal{F}_x$ surjektiv, so existiert eine offene Umgebung U von x, sodass $w|_U$ surjektiv ist.

b) Ist $w_x = 0$, so existiert eine offene Umgebung U von x, sodass $w|_U = 0$ gilt.

Abgabe bis spätestens 7. Mai 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.