Nochmal die Aufgabe mit der Definition eines Vektorbündels:

Aufgabe 1. Ein Schemamorphismus $f : Y \to X$ heisst *Vektorbündel (von Rang n)*, wenn gilt:

a) Es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von X, sodass ein Isomorphismus $\varphi_i : f^{-1}(U_i) \cong \mathbb{A}^n_{U_i}$ für alle i existiert;

b) Ist $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, so ist für ein beliebiges affines $V = \mathrm{Spec}(R) \subset U_i \cap U_j$ der Isomorphismus $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\mathbb{A}^n_V} : \mathbb{A}^n_V \to \mathbb{A}^n_V$ induziert von einem linearen Automorphismus $\theta_{ij} : R[X_1, \ldots, X_n] \to R[X_1, \ldots, X_n]$, $\theta_{ij}(X_k) = \sum a_{kl} X_l$, $a_{kl} \in R$.

Sei f ein Vektorbündel von Rang n und für $U \subset X$ offen

$$\mathcal{F}(U) = \{s : U \to Y \text{ Morphismus} |\ f \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

Zeige: $\mathcal{F}$ ist ein lokal-freier $\mathcal{O}_X$-Modul von Rang n.

Bei der Definition wird etwas zu implizit gefordert, dass man für offene (affine) $U \subseteq U_i$ für ein i die Isomorphie $f^{-1}(U) \cong \mathbb{A}^n_U$ hat, d.h. man fordert eine Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]) \times_{\mathbb{Z}} U_i \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\cong"] & U_i \arrow[d, hook] \\
f^{-1}(U_i) \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

Dies entspricht dann auch schon eher dem “klassischen Fall” von Vektorbündeln auf Mannigfaltigkeiten. Dummerweise wird das aus der obigen Definition so nicht klar, da die Isomorphismen für die U_i ja zunächst beliebig gegeben sein können.