Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 4 23. April 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei X ein Schema und Z eine abgeschlossene Teilmenge von X. Zeige: Für alle $x \in X$ gilt $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X) = \dim \mathcal{O}_{X,x}$, sowie $\operatorname{codim}(Z, X) = \min_{z \in Z} \dim \mathcal{O}_{X,z}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein abgeschlossener Morphismus von Schemata. Zeige:

a) Ist f surjektiv, so gilt $\dim X \geq \dim Y$.

b) Ist f injektiv, so gilt $\dim X \leq \dim Y$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Zeige:

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{x \in X | \ \dim_x X \leq n\}$ offen in X.

b) Ist $x \in U$ eine offene Umgebung von x, so gilt $\dim_x U = \dim_x X$.

c) Ist X ein k-Schema (k Körper) lokal von endlichem Typ und I die Menge der irreduziblen Komponenten von X, die x enthalten, so gilt $\dim_x X = \sup_{Z \in I} \dim Z$. Ist x ein abgeschlossener Punkt, so gilt $\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$.

d) Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$ für einen diskreten Bewertungsring A, so gilt eine der Gleichheiten in c) für dieses X in diesem Fall nicht.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei k ein Körper.

a) Sei $X = \operatorname{Spec}(k[x, y, z]/I)$ mit $I = (x^3 - yz, y^2 - xz, z^2 - x^2y)$. Bestimme $\dim X$.

b) Gib ein Beispiel für ein reduzibles k-Schema X von endlichem Typ über k und eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ mit $\operatorname{codim}_X Y + \dim Y < \dim X$ an.

Abgabe bis spätestens 30. April 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.