Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 3 16. April 2009

Generalvoraussetzung: $(R, \mathfrak{m})$ = lokaler Ring.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei R noethersch und $M \neq 0$ ein endlich-erzeugbarer R-Modul sowie

$$\delta(M) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \exists x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m} : \ l_A(M/(x_1M + \ldots + x_nM)) < \infty\}.$$

Zeige:

a) Ist $x \in \mathfrak{m}$, so gilt $\delta(M/xM) \geq \delta(M) - 1$.

b) Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$ und ist $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ ($\overline{x}_i = x_i + \mathfrak{m}^2$) eine Basis von $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum, so ist so ist $x_1, \ldots, x_n$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}$.

c) Ist R regulär und $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, so ist $R/(x)$ regulär und es gilt $\dim R/(x) = \dim R - 1$.

Hinweis: Aus der Algebra 2 ist bekannt: $l_A(M) < \infty \iff \dim_A M = 0$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei R regulär. Zeige, dass R integer ist mit Hilfe folgender Schritte:

a) Unterscheide $\dim R = 0$ und $\dim R > 0$.

b) Sei ab jetzt $\dim R > 0$. Dann existiert ein $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, sodass $R/(x)$ (mit Induktion) integer ist.

c) Angenommen, R wäre nicht integer. Sind $\{\wp_1, \ldots, \wp_r\}$ die minimalen Primideale von R, so folgt mit obigem x, dass $x\wp_j = \wp_j$ für ein j gilt. Dies führt zu einem Widerspruch.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei R noethersch und integer (dies ist im folgenden wegen Aufgabe 2 keine Einschränkung) mit $\dim R = 1$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) R ist ein diskreter Bewertungsring.

b) R ist ganzabgeschlossen.

c) R ist regulär.

d) $\mathfrak{m}$ ist ein Hauptideal.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien $K \subseteq L$ zwei Funktionenkörper, seperabel über einem Körper k. Zeige: Die kanonische Abbildung $\Omega^1_{K/k} \otimes_K L \to \Omega^1_{L/k}$ ist injektiv genau dann, wenn L/K seperabel ist.

Abgabe bis spätestens 23. April 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.