Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie II

Sommersemester 2009

Aufgabenblatt 1 2. April 2009

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Zeige mit Hilfe der Segre-Einbettung, dass die Komposition zweier projektiver Morphismen projektiv ist.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein affines k-Schema von endlichem Typ der Dimension 1 (kurz gesagt, eine Kurve), d.h. $V = \mathrm{Spec}(k[X,Y]/f(X,Y))$ für ein nicht-konstantes Polynom, wobei noch gefordert sei, dass f keine mehrfachen Faktoren enthalte. Entscheide für folgende f an allen Punkten, ob V dort glatt von relativer Dimension 1 ist oder nicht:

a) $f = X^n + Y^n - 1$,

b) $f = Y^2 - X^2(X+1)$,

c) $f = Y^2 - X^3 - aX - b$,

d) $f = F \cdot G$ mit teilerfremden $F, G \in k[X,Y]$.

Hinweis: Man darf annehmen, dass die Definition der Glattheit unabhängig von der offenen Einbettung ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei k ein Körper und $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n_k(k)$ ein k-rationaler Punkt. Zeige: Man hat auf kanonische Weise $T_x\mathbb{P}^n_k = k^{n+1}/k \cdot (x_0 : \ldots : x_n)$.
Hinweis: Man benutze den Morphismus $\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_k$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei k ein Körper und $f : X \to S,\ g : Y \to S$ Morphismen von k-Schemata. Seien $x \in X(k),\ y \in Y(k)$, sodass deren Bilder in $S(k)$ identisch sind, d.h. man hat einen k-wertigen Punkt $(x,y)_S \in (X \times_S Y)(k)$. Zeige:

$$T_{(x,y)_S}(X \times_S Y) = \{(t,u) \in T_xX \times T_yY \mid df_x(t) = dg_y(u)\}.$$

Abgabe bis spätestens 9. April 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.