Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 14 22. Januar 2009

Aufgabe 1.
Sei $S' \to S$ ein Morphismus von Schemata und X ein S-Schema. Man kann X via $\mathrm{Hom}_S(-, X)$ als Funktor $(\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{Opp}} \to (\mathrm{Sets})$ auffassen. Sei $X' : (\mathrm{Sch}/S')^{\mathrm{Opp}} \to (\mathrm{Sets})$ die Einschränkung von X auf $(\mathrm{Sch}/S')^{\mathrm{Opp}} \to (\mathrm{Sets})$, d.h. $X'(T \to S') := X(T \to S' \to S)$. Zeige: X' wird durch $X \times_S S'$ dargestellt.

Aufgabe 2.
Zu einem Schema X bezeichne $|X|$ den zugrundeliegenden topologischen Raum. Sei S ein Schema und $\pi : X \to S, \rho : Y \to S$ Morphismen von S-Schemata. Sei $X \times_S Y$ das Faserprodukt in der Kategorie der S-Schemata und $|X| \times_{|S|} |Y|$ das Faserprodukt (als Mengen) versehen mit der Produkttopologie.

a) Zeige: Man hat eine kanonische stetige surjektive Abbildung $f : |X \times_S Y| \to |X| \times_{|S|} |Y|$.

b) Sei $X = Y = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ und $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$. Zeige: $X \times_S Y \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ und f (wie oben) ist nicht injektiv.

c) Sei $S = \mathrm{Spec}(k)$ für einen Körper k und $X = Y = \mathbb{A}^1_k$. Zeige: f ist in diesem Fall keine offene Abbildung.

Aufgabe 3.
Sei S ein Schema und $(X_i), (Y_j)$ Familien von S-Schemata. Zeige:

$$(\coprod X_i) \times_S (\coprod Y_j) = \coprod (X_i \times_S Y_j).$$

Aufgabe 4.
Sei $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ und $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T_1, T_2]/(T_1 T_2^2 - m))$, wobei man den kanonischen Morphismus $f : X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ hat. Bestimme alle Fasern von f. Welche Fasern sind integer, welche reduzibel, und wieviele irreduzible Komponenten gibt es dort?

Aufgabe 5.
Sei k ein Körper und $f : \mathbb{A}^1_k \to \mathrm{Spec}(k)$ der Strukturmorphismus. Zeige: f ist abgeschlossen, aber die durch den Basiswechsel induzierte Abbildung $f_{(\mathbb{A}^1_k)} : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ ist nicht abgeschlossen.

Keine Abgabe.