**Universität Heidelberg**
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

# Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

**Aufgabenblatt 13** 15. Januar 2009

**Aufgabe 1.** *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Wir sagen: $f$ sei *surjektiv* genau dann, wenn die zu $f$ gehörige Abbildung topologischer Räume surjektiv ist.

a) Zeige: Ist $f$ eine Immersion, so ist $f$ ein Monomorphismus in der Kategorie der Schemata (d.h. $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h \ \forall g, h$).

b) Wenn $f$ ein Epimorphismus in der Kategorie der Schemata ist (d.h. $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h \ \forall g, h$), ist $f$ dann auch surjektiv? Umkehrung?

**Aufgabe 2.** *(4 Punkte)*
Zeige: Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata ist surjektiv genau dann, wenn für jeden Körper $K$ und jeden Morphismus $\mathrm{Spec}(K) \to Y$ eine Erweiterung $K'/K$ und ein Morphismus $\mathrm{Spec}(K') \to X$ existiert, sodass

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K') \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

**Aufgabe 3.** *(4 Punkte)*
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $f_{\mathrm{red}} : X_{\mathrm{red}} \to Y_{\mathrm{red}}$ der zugehörige Morphismus reduzierter Schemata. Zeige: Ist $f$ surjektiv (bzw. eine Immersion), so ist auch $f_{\mathrm{red}}$ surjektiv (bzw. eine Immersion). Ist umgekehrt $f_{\mathrm{red}}$ surjektiv, so auch $f$.

**Aufgabe 4.** *(4 Punkte)*
Sei $F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to (\mathrm{Sets})$ ein mengenwertiger kovarianter Funktor. Ein *universelles Objekt* für $F$ ist ein Paar $(X, x)$ mit $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})$ und $x \in F(X)$, sodass für jedes Objekt $Y \in \mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ und jedes $e \in F(Y)$ genau ein Morphismus $f : X \to Y$ existiert mit $e = F(f)(x)$. Zeige:

a) Ein universelles Objekt für $F$ (falls es existiert) ist bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt (man mache sich zuerst klar, was die Morphismen hier sein müssen).

b) Sei $(X, x)$ mit $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}})$ und $x \in F(X)$ beliebig. Dann sind $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ und $F$ natürlich isomorph genau dann, wenn $(X, x)$ ein universelles Objekt für $F$ ist.

---

Abgabe bis spätestens 22. Januar 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.