Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 11 18. Dezember 2008

X = Schema. Wir sagen: Lokal hat X die Eigenschaft E (bzw. X ist lokal-E), wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine (affine) Umgebung $x \in U$ existiert, sodass U die Eigenschaft E hat. Damit das im folgenden auch Sinn macht sei erwähnt, dass man folgendes zeigen kann: X ist lokal-noethersch (im Sinne der Vorlesung) genau dann, wenn es lokal-noethersch nach obiger Definition ist (vgl. etwa Hartshorne, II.3.2).

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Wir betrachten folgende Konstruktion: Sei k algebraisch abgeschlossen und seien $\mathbb{Z}$ Kopien von $\mathbb{A}_k^1$ so verklebt, dass sich die i-te Kopie von $\mathbb{A}_k^1$ mit der $(i+1)$-ten genau in einem Punkt schneidet, wobei dieser Schnittpunkt die 0 in der i-ten Kopie und die 1 in der $(i+1)$-ten Kopie sein soll. Zeige: Dies ergibt ein zusammenhängendes, lokal-noethersches Schema, welches nicht quasi-kompakt ist.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei X lokal-noethersch. Zeige: Lokal hat X höchstens endlich viele irreduzible Komponenten (d.h. maximale irreduzible Teilmengen).

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Für einen topologischen Raum X werden generische Punkte manchmal auch folgendermassen definiert: Ein Punkt $x \in X$ heisst *generisch*, wenn x der eindeutige Punkt von X ist, der nach x spezialisiert (Achtung: dies unterscheidet sich eventuell von der bisherigen Definition!). Seien im folgenden X wieder ein Schema und generische Punkte in diesem Sinne verstanden.

a) Sei X ein affines Schema. Zeige: Der Punkt $\mathfrak{p}$ ist ein generischer Punkt genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal ist.

b) Zeige: Die irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ entsprechen bijektiv den irreduziblen Komponenten von X, die x enthalten.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

a) Sei X lokal-noethersch. Zeige: X ist lokal-integer genau dann, wenn für alle $x \in X$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Integritätsbereich ist.

b) Seien K ein Körper und $X = \operatorname{Spec}(\prod_{i=1}^n K)$, $n > 1$. Zeige: X ist nicht integer, aber $\mathcal{O}_{X,x}$ ist ein Körper für alle $x \in X$.

Abgabe bis spätestens 8. Januar 2009, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.

Wir wünschen allen schöne Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!