Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 10 11. Dezember 2008

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei R ein lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal. Zeige: Jeder Morphismus von Schemata $f : \mathrm{Spec}(R) \to X$ faktorisiert über den kanonischen Morphismus $j_x : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$, wobei $x = f(\mathfrak{m})$. Man erhält eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(R), X) \to \{(x, \varphi)|\ x \in X, \varphi : \mathcal{O}_{X,x} \to R \text{ lokaler Ringhomomorphismus}\}.$$

Aufgabe 2. *(8 Punkte)*
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $A = R[X_0, \dots X_n]$. Sei $A = \bigoplus_{d=0}^{\infty} A_d$ die Zerlegung in homogene Bestandteile. Ist I ein Ideal in A und $I_d = I \cap A_d$, so heisst I *homogen*, falls $I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} I_d$ gilt. Wir definieren

$$X := \mathrm{Proj}(A) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)|\ \mathfrak{p} \text{ ist homogenes Primideal in } R, \mathfrak{p} \not\supseteq (X_0, \dots, X_n)\}$$

und wollen daraus ein Schema basteln, welches dann gleich dem $\mathbb{P}^n_R$ aus der Vorlesung sein soll.

a) Sei $I \trianglelefteq A$ homogen und $V_+(I) = \{\mathfrak{p} \in X|\ I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Zeige: Durch die Festlegung "$V_+(I) =$ abgeschlossene Menge in X" wird eine Topologie auf X definiert. Die Mengen $D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in X|\ f \notin \mathfrak{p}\} = X \setminus V_+((f))$ für homogene $f \in A$ sind offen und bilden eine Basis dieser Topologie.

b) Für $f \in A$ homogen sei

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) = \left\{ \frac{g}{f^m} |\ g \in A, g \text{ homogen mit Grad } \deg g = m \deg f, m \geq 1 \right\}.$$

Zeige: Durch diese Festlegung erhält man eine Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X und $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein lokal-geringter Raum.

c) Sei $U_j = D_+(X_j),\ j = 0, \dots, n$. Offensichtlich gilt $X = \bigcup_{j=0}^{n} U_j$. Sei

$$A^j = R\left[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_{j-1}}{X_j}, \frac{X_{j+1}}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}\right].$$

Zeige: $(U_j, \mathcal{O}_X|_{U_j}) \cong (\mathrm{Spec}(A^j), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A^j)})$, d.h. X ist ein Schema.

d) Zeige: $\mathcal{O}_X(X) = R$, d.h. insbesondere ist X affin genau dann, wenn $n = 0$ (man erinnere sich an die "klassische" Situation, vgl. Satz 1.58 im Skript).

Bemerkung: Eine analoge Konstruktion funktioniert ganz allgemein für einen graduierten Ring A.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien k, k' Körper verschiedener Charakteristik. Seien $X \neq \emptyset$ ein k-Schema und X' ein k'-Schema. Zeige, dass es keinen Morphismus $X \to X'$ gibt.

Abgabe bis spätestens 18. Dezember 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.