Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 9 4. Dezember 2008

A = kommutativer Ring mit 1, $X = \mathrm{Spec}(A)$.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Sei $U \subseteq X$ offen. Zeige:

$$\mathcal{O}_X(U) \cong \{\{s_\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\in U} \in \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} | \ \forall \mathfrak{p} \in U: \ s_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}, \ \exists \text{ Umgebung } \mathfrak{p} \in V \subseteq U$$
$$\text{und } \mathfrak{a}, f \in A, \text{ sodass } \forall \mathfrak{q} \in V: \ f \notin \mathfrak{q}, \ s_\mathfrak{q} = \mathfrak{a}/f \in A_\mathfrak{q}\}$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f = {}^a\varphi : X = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A) = Y$ der induzierte Morphismus affiner Schemata. Zeige:

a) φ ist injektiv genau dann, wenn der Garbenmorphismus $f^\flat : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ injektiv ist.

b) Ist φ surjektiv, so ist f ein Homöomorphismus von X auf eine abgeschlossene Teilmenge von Y, und $f^\flat : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ist surjektiv.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Zeige:

a) $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein lokal-geringter Raum, und es gilt $\kappa(x) = k \ \forall x \in X$.

b) Ist $(X, \mathcal{O})$ eine affine Varietät und $\Gamma(X)$ ihr affiner Koordinatenring, so gilt $\Gamma(X) = \mathcal{O}_X(X)$. Ist $f \in \Gamma(X)$ und $x \in X$, so stimmen die zwei Auffassungen

   i) $f(x)$ als (Restklasse eines) Polynom(s) und Einsetzen von x,

   ii) $f(x) \in \kappa(x)$ als das Bild des kanonischen Homomorphismus $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x)$

   von $f(x)$ überein.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathrm{char}(k) \neq 2$ sowie $A = k[S,T]/(T^2 - S^3 - S^2)$. Sei x der dem Primideal $\mathfrak{m} = (S,T)$ entsprechende Punkt. Bestimme die Primideale des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x} = A_\mathfrak{m}$. Zeige, dass die *Vervollständigung* $\hat{A} = k[[S,T]]/(T^2 - S^3 - S^2)$ kein Integritätsring ist.
Bemerkung: Die Vervollständigung ist für lokale Betrachtungen in einem Punkt von Bedeutung.

Abgabe bis spätestens 11. Dezember 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.