Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 8 27. November 2008

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und A eine abelsche Gruppe. Auf X betrachten wir die *Wolkenkratzergarbe* W mit

$$W(U) = \begin{cases} A, & \text{falls } x \in U, \\ \{0\}, & \text{falls } x \notin U. \end{cases}$$

Auf $\overline{\{x\}}$ sei weiterhin die konstante Garbe K mit Werten in A gegeben. Zeige: Für die Inklusion $i : \overline{\{x\}} \to X$ gilt $i_*K = W$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Ist $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben von abelschen Gruppen, so ist das Bild $\mathrm{Im}(\varphi)$ definiert als die zu dem Prägarbenbild $\varphi(U)(\mathcal{F}(U))$ assoziierte Garbe. Zeige:

a) Ist φ ein Morphismus von Prägarben und ist $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv für alle U, so ist die induzierte Abbildung $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \to \tilde{\mathcal{G}}$ von assoziierten Garben injektiv.

b) Man kann $\mathrm{Im}(\varphi)$ mit einer Untergarbe von $\mathcal{G}$ (d.h. $\mathrm{Im}(\varphi)(U)$ ist eine Untergruppe von $\mathcal{G}(U)$) identifizieren.

c) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{G} \iff \varphi$ surjektiv.

Aufgabe 3. *(8 Punkte)*
Sei G eine Gruppe, die auf einem lokal-geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ operiert, d.h. es gibt einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(X)$ (Automorphismen lokal-geringter Räume). Sei $Y = X/G$ (Bahnen von X modulo G) die Quotientenmenge und $p : X \to Y$ die natürliche Projektion, wobei Y mit der Quotiententopologie versehen ist (d.h. $U \subseteq Y$ offen $\iff p^{-1}(U) \subseteq X$ offen). Zeige:

a) p ist eine offene Abbildung.

b) G operiert auf dem lokal-geringten Raum $(p^{-1}(U), \mathcal{O}_X|_{p^{-1}(U)})$. Insbesondere operiert G auf $\mathcal{O}_X(p^{-1}(U))$.

c) Für $U \subseteq Y$ offen seien $\mathcal{O}_Y(U) := \mathcal{O}_X(p^{-1}(U))^G$ die unter G invarianten Elemente. Dann ist $\mathcal{O}_Y$ eine Garbe von Ringen auf Y.

d) Sei $y \in Y$ und $x \in p^{-1}(y)$. Dann ist $\mathcal{O}_{Y,y} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$. Sei $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ und sei $\mathfrak{m}_y := \mathfrak{m}_x \cap \mathcal{O}_{Y,y}$. Dann ist $\mathfrak{m}_y$ das eindeutige maximale Ideal von $\mathcal{O}_{Y,y}$.

e) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ist ein lokal-geringter Raum und p induziert einen Morphismus von lokal-geringten Räumen von $(X, \mathcal{O}_X)$ nach $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

Bemerkung: Das so konstruierte p erfüllt eine universelle Eigenschaft: Es gilt $p = p \circ \sigma \ \forall \sigma \in G$, und ist $f : X \to Z$ ein weiterer Morphismus lokal-geringter Räume mit dieser Eigenschaft, so faktorisiert f eindeutig über p.

Abgabe bis spätestens 4. Dezember 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.