Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 7 20. November 2008

X = topologischer Raum.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

a) Wir betrachten die Menge $X = \{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie, d.h. jede Teilmenge ist offen. Bestimme alle Garben $\mathcal{F}$ von Mengen auf X.

b) Bestimme die Halme $\mathcal{F}_x$ der Garben $\mathcal{F}$ aus a) in allen Punkten aus X.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Wir wollen einsehen, dass für Garbenmorphismen auf einem topologischen Raum X die Surjektivität auf den Halmen nicht äquivalent ist zur Surjektivität auf allen offenen Mengen. Zeige dies in den folgenden Fällen:

a) $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ die Garbe der holomorphen invertierbaren Funktionen auf $X = \mathbb{C}^\times$ und $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ der durch $f \mapsto f^2$ induzierte Morphismus,

b) X eine Menge bestehend aus 3 Punkten (mit noch zu bestimmenden Garben und einem Morphismus dazwischen).

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X heisst *lokalkonstant*, falls für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ existiert, sodass $\mathcal{F}|_U$ eine konstante Garbe ist.

a) Sei X irreduzibel. Zeige, dass dann für eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X folgende Aussagen äquivalent sind:

   i) Für $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen ist die Restriktionsabbildung $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ bijektiv,

   ii) $\mathcal{F}$ ist eine konstante Garbe auf X,

   iii) $\mathcal{F}$ ist eine lokalkonstante Garbe auf X.

b) Sei X zusammenhängend, und es existiere eine Garbe $\mathcal{F}$, sodass $\mathcal{F}(X)$ mindestens zwei Elemente enthält sowie $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ bijektiv ist für alle $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Zeige: X ist irreduzibel.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X, so ist der *Träger* von $\mathcal{F}$ definiert als $\mathrm{Supp}\mathcal{F} = \{x \in X |\ \mathcal{F}_x \neq 0\}$. Sei $x_0 \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Wir definieren die Prägarbe $\mathcal{G}$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$ durch

$$\mathcal{G}(U) = \begin{cases} \mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U), & \text{falls } x_0 \notin U, \\ \mathcal{F}(U) = \{s \in \mathcal{G}(U) |\ s_{x_0} = 0\}, & \text{falls } x_0 \in U. \end{cases}$$

Zeige: $\mathcal{G}$ ist eine Garbe und $\mathrm{Supp}\mathcal{G} = \mathrm{Supp}\mathcal{F} \setminus \{x_0\}$, d.h. insbesondere ist der Träger von $\mathcal{G}$ i.a. nicht abgeschlossen.

Abgabe bis spätestens 27. November 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.