Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 5 6. November 2008

---

k = algebraisch abgeschlossener Körper, A = kommutativer Ring (mit 1).

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien $\Psi, \Lambda \subset \mathbb{P}^n(k)$ komplementäre lineare Unterräume sowie $X \subseteq \Psi$ eine projektive Varietät. Der "allgemeinere" Kegel wurde definiert als

$$\overline{X, \Lambda} = \bigcup_{q \in X} \overline{q, \Lambda},$$

wobei $\overline{q, \Lambda}$ den von q und Λ aufgespannten linearen Unterraum bezeichnet. Man mache nochmal explizit klar, dass $\overline{X, \Lambda}$ eine projektive Varietät ist. Beschreibe, wie man den allgemeineren Kegel durch iterative Konstruktion aus dem Kegel mit einem Punkt gewinnen kann (und dass diese Konstruktionen übereinstimmen!).

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Punkte $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{P}^2(k)$ heissen (bei uns) in allgemeiner Lage, falls keine drei der Punkte auf einer Geraden liegen. Zeige: Zu fünf Punkten $P_1, \ldots P_5 \in \mathbb{P}^2(k)$ in allgemeiner Lage gibt es genau eine Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^2(k)$ mit $P_1, \ldots, P_5 \in Q$, d.h. insbesondere haben zwei verschiedene Quadriken höchstens vier Schnittpunkte gemeinsam.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $f \in A$, $\wp \in \mathrm{Spec}(A)$. Zeige:

a) $\{\wp\}$ ist abgeschlossen in $\mathrm{Spec}(A) \iff \wp$ ist maximales Ideal,

b) $D(f) = \emptyset \iff f$ nilpotent,

c) $D(f) = \mathrm{Spec}(A) \iff f \in A^\times$,

d) Eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ ist quasikompakt genau dann, wenn $U = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a})$ für ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}$ in A.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $\mathrm{Spec}(A)$ ist unzusammenhängend,

b) A enthält ein Idempotent $e \neq 0, 1$,

c) $A \cong A_1 \times A_2$ mit $A_i \neq 0$.

Abgabe bis spätestens 13. November 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.