Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 4 30. Oktober 2008

K = algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. (Segre-Einbettung) *(4 Punkte)*
Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und $N := rs + r + s$. Zeige:

a) Die mengentheoretische Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^r_K \times \mathbb{P}^s_K &\to \mathbb{P}^N_K \\ ((x_0 : \ldots : x_r), (y_0 : \ldots : y_s)) &\mapsto (x_0 y_0 : \ldots : x_0 y_s : \ldots : x_r y_0 : \ldots x_r y_s) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und injektiv.

b) $\mathrm{Im}(\psi)$ ist eine projektive Menge in $\mathbb{P}^N_K$ (d.h. Nullstellenmenge von einem homogenen Ideal).

c) Ist $r = s = 1$, so gilt $\mathrm{Im}(\psi) = V(Z_1 Z_2 - Z_0 Z_3)$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei

$$U_0 = \{(x_0 : \ldots : x_n) |\ x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n_K.$$

Nach Vorlesung können wir U_0 mit $\mathbb{A}^n_K$ identifizieren. Sei weiterhin $Y \subseteq \mathbb{A}^n_K$ eine irreduzible Varietät sowie $\overline{Y}$ der Abschluss von Y in $\mathbb{P}^n_K$.

a) Zeige, dass $\overline{Y} = V_+(\Psi_0(f), f \in I(Y))$, wobei $\Psi_0(f) = X_0^{\deg f} f(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0})$ für $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$.

b) Zeige anhand des Beispiels von Blatt 1, Aufgabe 2 ($V(Y - X^2, Z - X^3)$), dass für Erzeuger $f_1, \ldots, f_m$ von $I(Y)$ im allgemeinen nicht $\overline{Y} = V_+(\Psi_0(f_1), \ldots, \Psi_0(f_m))$ gelten muss.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien $V_1 \subseteq \mathbb{P}^m_K$, $V_2 \subseteq \mathbb{P}^n_K$ projektive Varietäten und $\phi : V_1 \to V_2$ eine Abbildung. Existieren für jedes $x \in V_1$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq V_1$ und homogene Polynome $f_0, \ldots, f_n \in K[X_0, \ldots, X_m]$ vom gleichen Grad, sodass $\phi(y) = (f_0(y) : \ldots : f_n(y))$ für alle $y \in U_x$ gilt, so wurde in der Vorlesung nachgewiesen, dass ϕ ein Morphismus von Prävarietäten ist. Zeige die Umkehrung.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $V = V_+(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{P}^2_K$. Zeige, dass die Abbildung $\phi : (x : y : z) \mapsto (x + z : y)$ (gegeben auf dem Teil von V, auf dem sie definiert ist) sich zu einem Morphismus von Prävarietäten $\phi : V \to \mathbb{P}^1$ fortsetzt.

Abgabe bis spätestens 6. November 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.