Aufgabe 3.
Seien $V \subseteq \mathbb{P}^m(k), W \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ projektive Varietäten und $\phi : V \to W$ eine Abbildung. Dann ist ϕ ein Morphismus genau dann, wenn zu jedem $x \in V$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq V$ und homogene Polynome vom gleichen Grad $f_0, \dots, f_n \in k[X_0, \dots, X_m]$ existieren mit $\phi(y) = (f_0(y) : \dots : f_n(y))\ \forall y \in U_x$.

Beweis. Wir zeigen " $\Rightarrow$": Sei $x \in V$ und o.E. $\phi(x) \in U_0$. Sei $U = U_0 \cap W,\ U_x = \varphi^{-1}(U)$. Sei $X_i : U \to \mathbb{A}^1$ die reguläre Funktion $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$. Dann ist $X_i \circ \phi : U_x \to \mathbb{A}^1$ regulär, d.h. es existieren homogene Polynome vom gleichen Grad g_i, h_i mit $(X_i \circ \phi)(y) = \frac{g_i(y)}{h_i(y)}\ \forall y \in U_x^i$ für ein geeignetes $U_x^i \subseteq U_x$ offen. Sei $y \in \bigcap_{i=0}^n U_x^i := U_x$, d.h.

$$\phi(y) = (1 : \frac{g_1(y)}{h_1(y)} : \dots : \frac{g_n(y)}{h_n(y)})\ \forall y \in U_x.$$

Multiplikation mit einem geeigneten Polynom h (Vielfaches von $h_1, \dots, h_n$) liefert

$$\phi(y) = (h(y) : \frac{g_1(y)h(y)}{h_1(y)} : \dots : \frac{g_n(y)h(y)}{h_n(y)})\ \forall y \in U_x.$$