Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 3 — 23. Oktober 2008

$K =$ algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien $V_1 = V(Y - X^2),\ V_2 = V(XY - 1),\ V_3 = V(Y^2 - X^3)$. Zeige: Die affinen algebraischen Mengen V_1, V_2, V_3 sind irreduzibel und nicht paarweise isomorph.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $X = \bigcup_i U_i$ eine Prävarietät (U_i affine Varietäten) und $Y \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affine Varietät. Eine Abbildung $f : X \to K$ heisst *regulär* auf X, falls es zu jedem $P \in X$ eine offene Umgebung U von P gibt, sodass gilt: Für jedes i mit $U \cap U_i \neq \emptyset$ existieren Polynome p_i, q_i ("passend" zu U_i) mit $q_i(Q) \neq 0,\ Q \in U \cap U_i$, und $f = p_i/q_i$ auf $U \cap U_i$. Zeige: Eine Abbildung $\phi : X \to Y$ ist ein Morphismus (von Räumen mit Funktionen) genau dann, wenn $X_i \circ \phi$ eine reguläre Funktion auf X für alle i ist, wobei X_i die i-te Koordinatenfunktion vom Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ zu $\mathbb{A}_K^n$ bezeichnet.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei X eine Prävarietät und sei Y eine affine Varietät. Zeige, dass die Abbildung (!)

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{Alg}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)), \quad f \mapsto f^* = \{\varphi \mapsto \varphi \circ f\},$$

eine Bijektion ist.

Aufgabe 4. (Lustige Klebespiele) *(4 Punkte)*
Sei I eine Menge, U_i topologische Räume ($i \in I$), $U_{ij} \subseteq U_i$ offene Teilmengen ($i, j \in I$) und $\varphi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}$ Homöomorphismen, sodass

i) $U_{ii} = U_i,\ \varphi_{ii} = \mathrm{id}_{U_i}$,

ii) $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$ auf $U_{ij} \cap U_{ij},\ i, j, k \in I$.

Insbesondere ist bei ii) gefordert, dass $\varphi_{ji}(U_{ij} \cap U_{ik}) \subseteq U_{jk},\ i, j, k \in I$, gilt.

a) Zeige, dass ein topologischer Raum X zusammen mit Abbildungen $\psi_i : U_i \to X$ existiert, sodass für alle i die Abbildungen ψ_i einen Homöomorphismus von U_i mit einer offenen Teilmengen von X induziert, und dass $X = \bigcup_i \psi_i(U_i)$ sowie für alle $i, j \in I$ gilt: $\psi_j \circ \varphi_{ji}|_{U_{ij}} = \psi_i|_{U_{ij}}$ (d.h. $\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji})$).
Hinweis: Quotiententopologie

b) Zeige, dass eine entsprechende Aussage für Räume mit Funktionen gilt. Zeige zudem: Ist I endlich, sind alle U_i Prävarietäten und ist X zusammenhängend, so ist X eine Prävarietät.

c) Gib ein Beispiel für eine Verklebung von Prävarietäten an, sodass ein zusammenhängender Raum mit Funktionen entsteht, der keine Prävarietät ist.

Abgabe bis spätestens 30. Oktober 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.