Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 2 16. Oktober 2008

Auf diesem Blatt bezeichne K einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es gelte $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Die Frobeniusabbildung ist definiert durch

$$\varphi : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^p, \dots, x_n^p).$$

Zeige: φ ist ein bijektiver Morphismus und die Umkehrabbildung φ^{-1} ist stetig, aber φ^{-1} ist kein Morphismus.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeige: Ist $F = (F_1, \dots F_n) : \mathbb{A}^n_K \to \mathbb{A}^n_K$ ein Isomorphismus, so ist die Jakobideterminante

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

ein konstantes Polynom ungleich 0.
Zusatz (**): Zeige die Umkehrung (Jakobivermutung).

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein nicht-konstantes Polynom und sei $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$ mit irreduziblen Polynomen f_i, sodass $(f_i) \neq (f_j)$ für alle $i \neq j$ gilt. Zeige, dass $\sqrt{(f)} = (f_1 \cdot \ldots \cdot f_r)$ gilt, und dass die irreduziblen Komponenten von $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ genau die $V(f_i)$, $i = 1, \dots, r$, sind.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien $V \subseteq \mathbb{A}^n_K$, $W \subseteq \mathbb{A}^n_K$ affine algebraische Mengen. Zeige:

a) Man kann $V \times W$ in natürlicher Weise als affine algebraische Menge in $\mathbb{A}^{n+m}_K$ auffassen.

b) Sind V, W irreduzibel, so auch $V \times W$.

Abgabe bis spätestens 23. Oktober 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.