Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Algebraische Geometrie I

Wintersemester 2008/09

Aufgabenblatt 1 9. Oktober 2008

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $E = \mathbb{R}^2$ die euklidische Ebene. Für einen Punkt $(0,0) \neq P = (x, y) \in E$ sei die Inversion σ am Einheitskreis gegeben durch

$$\sigma(P) := \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x, y).$$

Die Hyperbel H sei definiert durch

$$H := \{(x, y) \in E | \ x^2 - y^2 = 1\}.$$

a) Skizziere den Einheitskreis, H sowie $\sigma(H)$.

b) Zeige für $Q \in \sigma(H)$ die Gleichheit (bzgl. der Euklidischen Norm)

$$|Q - (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)| \cdot |Q - (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)| = \frac{1}{2}.$$

c) Bestimme ein Polynom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ vom Grad 4, sodass $\sigma(H)$ in der Menge der Nullstellen von F enthalten ist.
Hinweis: Lemniskate.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $Y = \{(t, t^2, t^3) | \ t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^3_K$. Zeige, dass Y eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^3_K$ ist. Gib Erzeuger für das Ideal $I(Y)$ an und zeige, dass der Koordinatenring $A(Y) = K[X_1, X_2, X_3]/I(Y)$ isomorph ist zum Polynomring in einer Variablen über K.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Man kann $\mathbb{A}^2_K$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K mit $\mathbb{A}^1_K \times \mathbb{A}^1_K$ identifizieren (als Mengen). Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2_K$ nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologien von zwei Kopien von $\mathbb{A}^1_K$ ist.
Hinweis: Betrachte die "Diagonale".

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Zeige:

a) Jede affine algebraische Menge in $\mathbb{C}^n$ ist abgeschlossen in der Euklidischen Topologie.

b) Das abgeschlossene Quadrat $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | \ |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ in $\mathbb{C}^2$ ist keine affine algebraische Menge.

Abgabe bis spätestens 16. Oktober 2008, 9:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.