Proposition. *Sei $A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe mit Eins. Seien M ein A-Modul, N, P B-Moduln. Dann hat man den kanonischen Isomorphismus*

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \cong (M \otimes_A N) \otimes_B P$$

von B-Moduln.

Proof. Es reicht zu zeigen: Es existieren A-lineare Abbildungen

$$M \otimes_A (N \otimes_B P) \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} (M \otimes_A N) \otimes_B P$$

mit $f(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z$ und $g((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$. Die B-Linearität folgt dann automatisch, da B durch P bzw. durch $N \otimes_B P$ auf dem Tensorprodukt operiert.

Sei $x \in M$ und $t_x : N \to M \otimes_A N, y \mapsto x \otimes y$. t_x ist B-linear, und wir erhalten wegen der Funktorialität des Tensorprodukts eine B-lineare Abbildung $t_x \otimes \mathrm{id}_P : N \otimes_B P \to (M \otimes_A N) \otimes_B P$. Sei

$$f' : M \times (N \otimes_B P) \to (M \otimes_A N) \otimes_B P,\ (x, u) \mapsto (t_x \otimes \mathrm{id}_P)(u).$$

f' ist A-bilinear (!), setzt sich also wegen der Eigenschaft des Tensorprodukts zu einer A-linearen Abbildung f mit $f(x \otimes (y \otimes z)) = (t_x \otimes \mathrm{id}_P)(y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$ wie gewünscht fort.

Analog sei für $z \in P$ die Abbildung $t_z : N \to N \otimes_B P, y \mapsto y \otimes z$ definiert, welche A-linear ist. Wir erhalten eine B-lineare Abbildung $\mathrm{id}_M \otimes t_z : M \otimes_A N \to M \otimes_A (N \otimes_B P)$. Sei

$$g' : (M \otimes_A N) \times P \to M \otimes_A (N \otimes_B P),\ (u, z) \mapsto (\mathrm{id}_M \otimes t_z)(u).$$

g' ist B-bilinear und setzt sich zu einer B-bilinearen Abbildung g mit $g((x \otimes y) \otimes z) = (\mathrm{id}_M \otimes t_z)(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$ fort.

Die Abbildungen f und g sind invers zueinander, womit die Behauptung folgt. □