Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra II

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 12 2. Juli 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich, $K = \mathrm{Quot}(A)$ der Quotientenkörper von A und L/K eine endliche galoissche Körpererweiterung mit Galoisgruppe G. Sei weiterhin $B = \overline{A}^L$. Zeigen Sie, dass $\sigma(B) = B$ für alle $\sigma \in G$ und $A = B^G$ gilt.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $D \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie Zahl (d.h. in der Primfaktorzerlegung taucht jede Primzahl höchstens einmal auf) und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Zeigen Sie: $\overline{\mathbb{Z}}^K = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$, wobei

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{D}, & \text{falls } D \equiv 2, 3 \mod 4, \\ \frac{1+\sqrt{D}}{2}, & \text{falls } D \equiv 1 \mod 4. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 11.16.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

a) Sei $A \subset B$ eine kommutative Ringerweiterung. Zeigen Sie: Ist $B \setminus A$ eine unter der Multiplikation abgeschlossene Teilmenge, so ist A ganzabgeschlossen in B.

b) Erklären Sie, wie sich der Begriff der Ganzheit allgemeiner auf Ringhomomorphismen $A \to B$ übertragen lässt.

c) Seien A, A', B, B' kommutative Ringe und folgendes kommutatives Diagramm von Ringen gegeben:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: Ist $x \in B$ ganz über A, so ist $g(x)$ ganz über A'.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien $A \subset B$ eine Erweiterung von Integritätsbereichen und $P \in B[X]$. Zeigen Sie: Ist P ganz über $A[X]$, so sind alle Koeffizienten von P ganz über A.
Hinweis: Betrachten Sie $P - X^r$ für r gross genug.

Abgabe bis spätestens 9. Juli 2015, 14:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.