Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra II

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 11 25. Juni 2015

Seien R ein kommutativer Ring mit Eins und $S \subset R \backslash \{0\}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*
Sei I ein Ideal in R und M ein endlich erzeugter R-Modul.

a) Zeigen Sie: $S^{-1}M = 0 \iff sM = 0$ für ein $s \in S$.

b) Zeigen Sie: Ist $S = 1 + I$, so folgt $S^{-1}I \subset \mathrm{Jac}(S^{-1}R)$.
Hinweis: Aufgabe 2, Blatt 9.

c) Sei $IM = M$. Verwenden Sie a) und b), um die Existenz eines $x \in R$ mit $x \equiv 1 \mod I$ und $xM = 0$ zu zeigen.

d) Sei $f : M \to M$ ein Epimorphismus von R-Moduln. Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.
Hinweis: Betrachten Sie M als $R[X]$-Modul, wobei $X.m := f(m)$, $m \in M$, und verwenden Sie c).

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien R ein Integritätsbereich und M ein R-Modul. Für einen Modul N (über R oder $S^{-1}R$) bezeichnet $T(N)$ den Torsionsmodul von N. Zeigen Sie:

a) $T(S^{-1}M) = S^{-1}T(M)$.

b) $T(M) = 0 \iff \forall$ Primideale $\mathfrak{p} \subset R$: $T(M_{\mathfrak{p}}) = 0 \iff \forall$ maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$: $T(M_{\mathfrak{m}}) = 0$.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*
Seien $s \in R$ und s kein Nullteiler sowie $S = \{1, s, s^2, s^3, \ldots\}$. Zeigen Sie: $S^{-1}R$ ist als Ring isomorph zu $R[X]/(sX - 1)$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien M ein R-Modul, R' ein kommutativer Ring und $R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) $S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \cong S^{-1}(M \otimes_R N)$ als $S^{-1}R$-Moduln.

b) Ist M flach als R-Modul, so ist $M \otimes_R R'$ flach als R'-Modul.

c) M ist flach als R-Modul genau dann, wenn $M_{\mathfrak{m}}$ flach ist als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset R$.

Bemerkung: Sie dürfen folgende Tatsache verwenden: Sind N, P R'-Moduln, so hat man einen kanonischen Isomorphismus $M \otimes_R (N \otimes_{R'} P) \cong (M \otimes_R N) \otimes_{R'} P$ von R'-Moduln (Beweis in der Zentralübung).

Abgabe bis spätestens 2. Juli 2015, 14:15 Uhr, bei den Kästen am Eingang von INF 288.