Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 10 18. Juni 2015

Ab diesem Blatt bezeichnen wir mit R (soweit nicht anders gefordert) einen kommutativen Ring mit Eins.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien M ein R-Modul, I eine Indexmenge und $(N_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Zeigen Sie: $M \otimes_R \left(\bigoplus_{i\in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I}(M \otimes_R N_i)$. Zeigen Sie ausserdem anhand eines Gegenbeispiels, dass das Tensorprodukt im allgemeinen nicht mit beliebigen direkten Produkten vertauscht.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $R = \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie: Ist A ein $\mathbb{Z}$-Torsionsmodul und B ein divisibler $\mathbb{Z}$-Modul, so gilt $A \otimes_{\mathbb{Z}} B = 0$.

b) Zeigen Sie unter Verwendung von Bemerkung 9.13 der Vorlesung: Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und $d = \mathrm{ggT}(m, n)$, so gilt $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien R ein lokaler Ring und M, N endlich erzeugte R-Moduln. Zeigen Sie: Ist $M \otimes_R N = 0$, so folgt $N = 0$ oder $M = 0$. Finden Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Folgerung, wenn mindestens einer der Moduln nicht endlich-erzeugt ist.
Hinweis: Nakayama-Lemma.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien M, N R-Moduln, wobei N frei von endlichem Rang n sei. Seien $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von N und $y_1, \ldots, y_m$ linear unabhängige Elemente von N.

a) Zeigen Sie, dass jedes $x \in M \otimes_R N$ eindeutig in der Form $x = \sum_{i=1}^n m_i \otimes x_i$ mit $m_i \in M$ geschrieben werden kann. Folgern Sie, dass $m_i = 0$ für alle i gilt falls $\sum_{i=1}^n m_i \otimes x_i = 0$ ist.

b) Zeigen Sie, dass aus $\sum_{i=1}^m m_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes_R N$ im allgemeinen nicht $m_i = 0$ für alle i folgt.