Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 9 11. Juni 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

a) Sei der Unterring $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \subset \mathbb{Q}$ definiert als $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] := \{\frac{a}{p^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie: Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ ist artinsch, aber nicht noethersch.

   Bemerkung: Man kann zeigen: Ist ein Ring mit Eins linksartinsch, so ist er notwendigerweise linksnoethersch.

b) Sei R ein (kommutativer) Integritätsring. Zeigen Sie: Ist R artinsch, so ist R ein Körper.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins. Zeigen Sie:

a) Sind $x, y \in R$ und hat $1 - xy$ ein Linksinverses, so hat auch $1 - yx$ ein Linksinverses.

b) $\mathrm{Jac}(R) = \{x \in R \mid \forall y \in R: \ 1 + yx \text{ hat ein Linksinverses}\} = \{x \in R \mid \forall y \in R: \ 1 + yx \in R^\times\}$.

c) $\mathrm{Jac}(R) = \mathrm{Jac}(R^{\mathrm{op}})$, d.h. $\mathrm{Jac}(R)$ ist der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale von R.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins. Zeigen Sie:

a) Ist $I \subset R$ ein beidseitiges Ideal mit $I \subset \mathrm{Jac}(R)$, so gilt $\mathrm{Jac}(R/I) = \mathrm{Jac}(R)/I$. Insbesondere folgt $\mathrm{Jac}(R/\mathrm{Jac}(R)) = 0$.

b) Ist $I \subset R$ ein beidseitiges Ideal und $\mathrm{Jac}(R/I) = 0$, so gilt $\mathrm{Jac}(R) \subset I$.

c) Ist $R = S[[X]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über einem Ring S mit Eins (d.h. $X \in Z(R)$), so gilt $\mathrm{Jac}(R) = \mathrm{Jac}(S) + X \cdot R$.

   Hinweis: Verwenden Sie a) und b) bzw. Aufgabe 2 b), um beide Inklusionen zu zeigen.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien R ein Ring mit Eins und $\mathfrak{a} \subset R$ ein beidseitiges Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Jac}(R)$. Seien M und N R-Moduln mit N endlich erzeugt und $f : M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Zeigen Sie: Ist $\overline{f} : M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ surjektiv, so ist f surjektiv.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 18. Juni 2015 um 14.15, bei dem Kasten neben HS2, INF288.