Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 8 3. Juni 2015

Auf diesem Zettel betrachten wir halbeinfache Ringe R mit Artin-Wedderburn Zerlegung

$$\rho : R \cong M_{r_1}(D_1) \times \ldots \times M_{r_n}(D_n), \tag{1}$$

wobei $r_i \in \mathbb{N}$ und D_i gewisse Schiefkörper sind.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper und R eine endlich-dimensionale K-Algebra, die halbeinfach ist. Zeigen Sie:

a) Ist R kommutativ, so ist R als Ring isomorph zu einem endlichen direkten Produkt von endlichen Körpererweiterungen von K.

b) Ist $R = K[G]$ für eine endliche Gruppe G mit $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$, so gilt $|G| = \sum_{i=1}^n r_i^2 \cdot \dim_K D_i$.

c) Es gibt genau n Isomorphieklassen einfacher R-Moduln. Ist M ein solcher, so gilt $\dim_K M = r_i \cdot \dim_K D_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien G eine endliche zyklische Gruppe und K ein Körper der Charakteristik 0. Wir wollen die Artin-Wedderburn Zerlegung von $K[G]$ in einigen Fällen berechnen.

a) Überlegen Sie sich, wie man $K[G]$ als Quotient des Polynomrings $K[T]$ auffassen kann.

b) Sei $K = \mathbb{Q}$. Berechnen Sie explizit alle Körper, die nach Aufgabe 1 a) in der Zerlegung von $K[G]$ auftauchen.

   Hinweis: Verwenden Sie die Kreisteilungspolynome Φ_d.

c) Sei $K = \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}[G] \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n/2-1}$, falls $|G|$ gerade ist, bzw. $\mathbb{R}[G] \cong \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{(n-1)/2}$, falls $|G|$ ungerade ist.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*
Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und D eine endlich-dimensionale K-Algebra, die zugleich ein Schiefkörper ist. Zeigen Sie: $D = K$.

Aufgabe 4. *(5 Punkte)*
Sei S_3 die symmetrische Gruppe von drei Elementen. Berechnen Sie die Artin-Wedderburn Zerlegung für $\mathbb{C}[S_3]$, indem Sie die Indizes r_i und die Schiefkörper D_i angeben, und bestimmen Sie explizit den Isomorphismus (1), indem Sie $\rho(\sigma)$ für alle $\sigma \in S_3$ angeben.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $(1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(1\ 2\ 3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ liefert eine Darstellung der S_3, die einen einfachen $\mathbb{C}[S_3]$-Modul induziert.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 11. Juni 2015 um 14.15, bei dem Kasten neben HS2, INF288.