Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 7 28. Mai 2015

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*
Seien R ein Ring mit Eins und $S = M_n(R), n > 0$, der Matrizenring über R. Bezeichne e_{ij} die Matrix mit 1 an der Stelle (i, j) und 0 sonst. Zeigen Sie die Äquivalenz der Kategorien R-Mod und S-Mod wie folgt:

a) Auf Objekten $M \in R$-Mod sei eine Abbildung F erklärt durch $F(M) = M^n$. Setzen Sie F zu einem Funktor R-Mod $\to S$-Mod fort.

b) Für $N \in S$-Mod sei eine Abbildung G erklärt durch $G(N) = \{e_{11}x |\ x \in N\}$. Setzen Sie G zu einem Funktor S-Mod $\to R$-Mod fort.

c) Zeigen Sie: $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{R-\mathrm{Mod}}$.

d) Sei N ein S-Modul, $x \in N$ und $\eta_N(x) := (e_{11}x, e_{12}x, \dots e_{1n}x)^t$. Zeigen Sie: $\eta = (\eta_N)_{N \in S-\mathrm{Mod}}$ liefert einen Isomorphismus $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{S-\mathrm{Mod}}$.
Hinweis: Die Abbildung $(x_1, \dots, x_n)^t \mapsto \sum e_{j1}x_j$ ist invers zu η_N auf $G(N)$.

Zusatz: Welche der Eigenschaften aus Bemerkung 6.17 und 6.18 der Vorlesung kann man mit Hilfe dieser Äquivalenz ableiten?

Aufgabe 2. *(3 Punkte)*
Ist jeder Unterring eines halbeinfachen Rings wieder halbeinfach? Lässt sich jeder Ring als Unterring eines halbeinfachen Rings auffassen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Ein Ring heisst einfach, wenn er keine nicht-trivialen *beidseitigen* Ideale enthält. Sei also R ein einfacher Ring mit Eins, und es existiere ein nicht-triviales Linksideal I darin. Sei $D := \mathrm{End}_R(I)$. Zeigen Sie: Die natürliche Abbildung $\lambda : R \to \mathrm{End}_D(I)$, $r \mapsto \lambda(r) := [a \mapsto ra]$, ist ein Ringisomorphismus.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\lambda(I)$ ein Linksideal in $\mathrm{End}_D(I)$ ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper, A ein Ring mit Eins und $K \to A$ ein Ringhomomorphismus mit $K \subset Z(A)$, d.h. A ist eine K-Algebra. Zeigen Sie:

a) Ist A einfach als Ring (vgl. Aufgabe 3) und unendlichdimensional über K, so ist jeder nicht-triviale A-Modul über K auch unendlichdimensional.

b) Ist A nullteilerfrei und endlichdimensional über K, so ist A ein Schiefkörper.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 3. Juni 2015 um 18.00, bei dem Kasten neben HS2, INF288.