**Universität Heidelberg**
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

# Algebra 2

Sommersemester 2015

**Aufgabenblatt 6** 21. Mai 2015

**Aufgabe 1.** *(4 Punkte)*
Seien $R$ ein Ring, $M$ ein $R$-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul.

a) Führen Sie den Beweis zu Bemerkung 6.7 der Vorlesung: Ist $M$ endlich erzeugt als $R$-Modul und $N \neq M$, so existiert ein maximaler Untermodul $N' \subset M$ mit $N \subset N'$.

b) Zeigen Sie: Ist $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Q}$, so gilt die Aussage in a) im allgemeinen nicht.

**Aufgabe 2.** *(4 Punkte)*
Seien $K$ ein Körper der Charakteristik 0 und $G$ eine endliche Gruppe. Wir betrachten $K$ als $K[G]$-Modul via der Festlegung $\varepsilon_g.x := x$ für alle $g \in G, x \in K$, die wir $K$-linear auf $K[G]$ fortsetzen. Zeigen Sie: $K$ ist projektiv als $K[G]$-Modul.

**Aufgabe 3.** *(4 Punkte)*

a) Welche der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln sind halbeinfach? Begründen Sie Ihre Antwort! $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ bezeichne hierbei die Menge aller Primzahlen.

- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
- $\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $\prod_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots$.

b) Sei $R$ ein Hauptidealring. Klassifizieren Sie (mit Begründung) alle halbeinfachen $R$-Moduln.

**Aufgabe 4.** *(4 Punkte)*
Seien $R$ ein Ring mit Eins, $M$ ein $R$-Rechtsmodul und $E = \mathrm{End}_R(M)$ der Endomorphismenring zu $M$. Zeigen Sie: Ist $M$ halbeinfach als $R$-Rechtsmodul, so ist $M$ halbeinfach als $E$-Linksmodul.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 28. Mai 2015 um 14.15, bei dem Kasten neben HS2, INF288.