Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 5 13. Mai 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln. Zeigen Sie:

a) $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ist projektiv als R-Modul genau dann, wenn M_i projektiv als R-Modul ist für alle $i \in I$.

b) $\prod_{i\in I} M_i$ ist injektiv als R-Modul genau dann, wenn M_i injektiv als R-Modul ist für alle $i \in I$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Seien R ein Integritätsbereich und M ein torsionsfreier R-Modul (d.h. $rm = 0$ für $r \in R, m \in M \Rightarrow r = 0$ oder $m = 0$). Zeigen Sie: M ist injektiv als R-Modul genau dann, wenn M teilbar ist.

Aufgabe 3. *(8 Punkte)*

a) Seien R ein Integritätsbereich, der kein Körper ist, und M ein freier R-Modul. Zeigen Sie: M ist nicht teilbar.

b) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}$ ist nicht projektiv als $\mathbb{Z}$-Modul.

c) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist injektiv als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul, aber nicht als $\mathbb{Z}$-Modul für $n > 1$.

d) Sei $R \subset M_2(K)$ der Ring der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen über einem Körper K. Zeigen Sie: R ist nicht injektiv als Linksmodul über sich selbst.

e) Seien $R = \mathbb{Z}[X]$, der Polynomring über $\mathbb{Z}$ und $K = \mathrm{Quot}(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{Q}(X)$ der Quotientenkörper von R. Zeigen Sie: $M = K/R$ ist teilbar als R-Modul, aber nicht injektiv.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 21. Mai 2015 um 14.15, bei dem Kasten neben HS2, INF288.