Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 4 7. Mai 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper und K-Mod$^{<\infty}$ die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume. Wir definieren folgende Kategorie $\mathcal{C}$: $\mathrm{Ob}_{\mathcal{C}} = \mathbb{N}$, und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(n,m) = M_{m,n}(K)$, die $m \times n$-Matrizen über K. Sind $A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(n,m)$ und $B \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(m,k)$, so ist $B \circ A := B \cdot A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(n,k)$. Zeigen Sie: $\mathcal{C}$ ist äquivalent zu K-Mod$^{<\infty}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien KRng die Kategorie der kommutativen Ringe und Grp die Kategorie der Gruppen. Wir betrachten die Funktoren $\mathrm{GL}_n : \mathrm{KRng} \to \mathrm{Grp},\ R \mapsto \mathrm{GL}_n(R)$ sowie $(\ )^\times : \mathrm{KRng} \to \mathrm{Grp},\ R \mapsto R^\times$. Zeigen Sie, dass die Determinante eine natürliche Transformation $\det : \mathrm{GL}_n \Rightarrow (\ )^\times$ ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins ($\neq 0$).

a) Seien A, B Ringe mit Eins, sodass $R = A \times B$. Zeigen Sie: $A \times 0$ ist ein projektiver R-Modul, der nicht frei ist.

b) Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich-erzeugter R-Modul. Zeigen Sie: M ist projektiv genau dann, wenn M frei ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien R ein Integritätsbereich und K der Quotientenkörper von R.

a) Sei K der Quotientenkörper von R. Zeigen Sie: K ist ein injektiver R-Modul.

b) R ist injektiv als R-Modul genau dann, wenn R ein Körper ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 13. Mai 2015 um 19.00, bei dem Kasten neben HS2, INF288.