Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 3 30. April 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper und $R = K[X, Y]$ der Polynomring über K in zwei Unbestimmten. Sei weiterhin der Unterring $S = K[X, XY, XY^2, XY^3, \ldots]$ von R gegeben. Zeigen Sie: R ist noethersch, S aber nicht.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit Eins, sodass eine Zerlegung $R = J_1 \oplus J_2$ als R-Linksmoduln existiert, wobei die J_i beidseitige Ideale von R seien. Zeigen Sie:

a) Es existieren idempotente Elemente $e_1, e_2 \in R$, sodass $J_i = Re_i$ gilt und J_i ein Ring mit neutralem Element e_i ist für $i = 1, 2$.

b) Ist I ein Linksideal von R, so existieren Linksideale I_i von J_i, sodass $I = I_1 \oplus I_2$ als R-Linksmoduln.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle unzerlegbaren endlich-erzeugbaren $\mathbb{Z}$-Moduln.

b) Finden Sie einen $\mathbb{Z}$-Modul M, der unzerlegbar ist, aber nicht einfach, d.h. sodass ein nichttrivialer Untermodul $M' \subset M$ existiert.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Wir betrachten die Klasse von Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, die aus allen Mengen besteht, sowie für $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ die Menge der Morphismen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, die aus allen Relationen $R \subseteq X \times Y$ besteht. Sind $R \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $S \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ für Mengen A, B, C, so ist $S \circ R$ definiert als

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C |\ \exists b \in B : (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Finden sie $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A)$ für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und überprüfen Sie, dass $\mathcal{C} = (\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B))$ eine Kategorie ist.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 7. Mai 2015 um 14.15, bei dem Kasten neben HS2, INF288.