Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 2 23. April 2015

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit abzählbar unendlicher Dimension. Wir betrachten den Ring $R = \mathrm{End}_K(V)$, den wir gleichzeitig als R-Rechtsmodul über sich selbst auffassen.

a) Zeigen Sie, dass $V \cong V \oplus V$ als K-Vektorräume.

b) Verwenden Sie a), um den R-Modulisomorphismus $R \cong R^2$ zu zeigen. Folgern Sie, dass $R^m \cong R^n$ gilt für $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Wir betrachten die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass man eine unendliche exakte Folge

$$\ldots \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \ldots$$

hat, indem Sie explizit die Abbildungen angeben.

b) Zeigen Sie, dass man eine kurze exakte Folge

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

hat, indem Sie explizit die Abbildungen angeben. Spaltet diese Folge? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei R ein Ring mit 1. Zeigen Sie:

a) Ist R rechtsnoethersch, so gilt dies ebenfalls für $M_n(R)$.

b) Ist M ein R-Linksmodul mit Untermoduln N_1, N_2, sodass M/N_1 sowie M/N_2 noethersch sind, so ist auch $M/N_1 \cap N_2$ noethersch.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei der Unterring

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

des Rings der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie: R ist rechtsnoethersch, aber nicht linksnoethersch.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 30. April 2015 um 14.15, bei dem Kasten neben HS2, INF288.