Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Denis Vogel
Dr. Andreas Riedel

Algebra 2

Sommersemester 2015

Aufgabenblatt 1 16. April 2015

Auf diesem Blatt bezeichne R einen nicht notwendigerweise kommutativen Ring mit Eins.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien M ein R-Linksmodul und $I \trianglelefteq R$ ein zweiseitiges Ideal.

a) Seien $\overline{r} = r+I \in R/I$ und $m \in M$. Unter welcher Voraussetzung macht die Vorschrift $\overline{r}\cdot m := rm$ M zu einem R/I-Modul?

b) M erfülle nun die Voraussetzung aus a). Sei $N \subset M$ eine beliebige Teilmenge. Sind folgende Aussagen äquivalent?

   (a) N ist ein R-Untermodul von M.

   (b) N ist ein R/I-Untermodul von M, aufgefasst als R/I-Modul.

   Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien G eine Gruppe und R kommutativ. Wir betrachten die Menge $R[G]$ aller Abbildungen $\varphi : G \to R$, sodass $\varphi(g) = 0$ für bis auf endlich viele $g \in G$ gilt. Sind $\varphi, \psi \in R[G]$, so definieren wir $\varphi + \psi := [g \mapsto \varphi(g) + \psi(g)]$, sowie $\varphi \cdot \psi := [g \mapsto \sum_{\substack{x,y \in G \\ xy=g}} \varphi(x)\psi(y)]$. Zeigen Sie:

a) $R[G]$ ist mit obigen Verknüpfungen ein Ring mit Eins.

b) Ist M ein R-Modul mit einer R-linearen G-Operation (d.h. es gilt $g.(rm) = r(g.m)$ für alle $g \in G, r \in R, m \in M$), so ist M in natürlicher Weise ein $R[G]$-Modul. Ist umgekehrt N ein $R[G]$-Modul, so ist N in natürlicher Weise ein R-Modul mit einer R-linearen G-Operation.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien M ein R-Linksmodul und N ein R-Untermodul von M. Zeigen Sie: Jeder Untermodul von M/N ist von der Form $(L+N)/N$, wobei L ein R-Untermodul von M ist. Muss dabei $N \subset L$ gelten? Ist L dabei eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Seien M ein R-Rechtsmodul, $E = \mathrm{End}_R(M)$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}_R(\prod_{i=1}^n M)$ und $\mathbb{M}_n(E)$, der Matrizenring der $n \times n$-Matrizen über E, kanonisch als Ringe isomorph sind.
Hinweis: Verwenden Sie die Inklusionsabbildungen $q_j : M \to \prod_i M = \bigoplus_i M,\ x \mapsto (0,\dots,0,x,0,\dots,0)$ und die Projektionsabbildungen $p_j : \prod_i M \to M,\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/alg2`
Abgabe bis spätestens 23. April 2015 um 14.15, bei dem Kasten neben HS2, INF288.